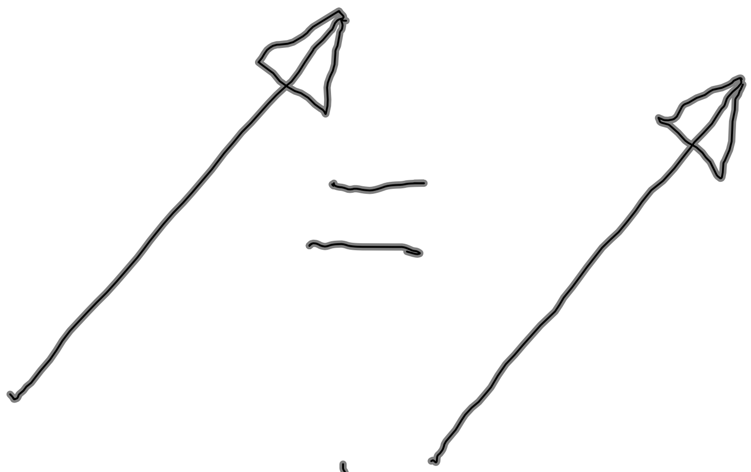
nov 3-08:04

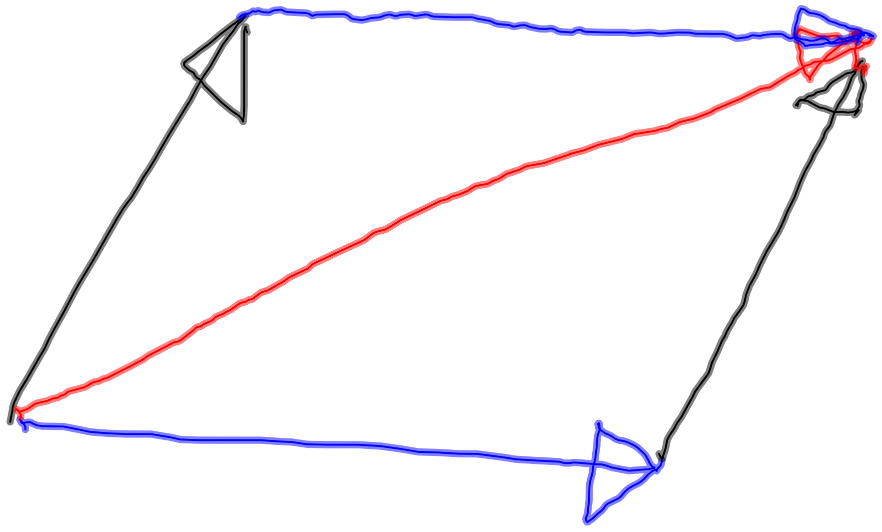
λ

nov 3-08:20

Addition

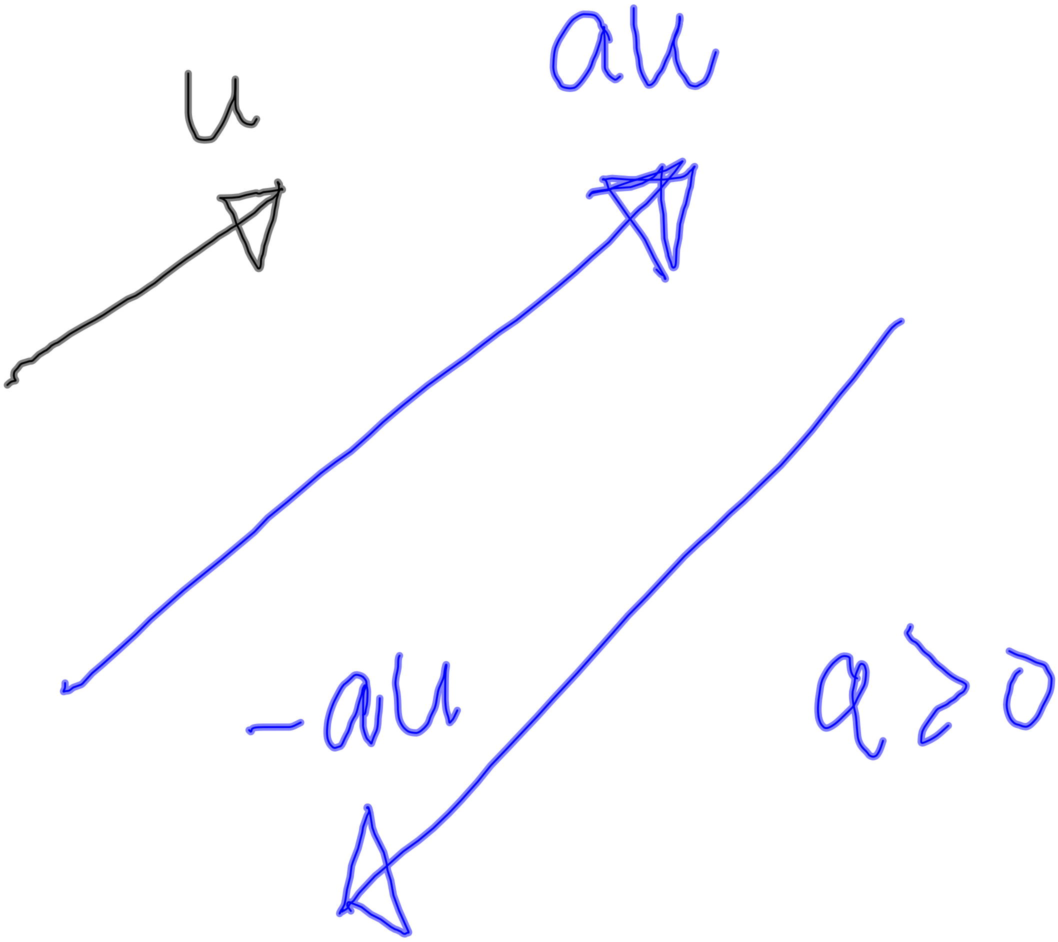


$\Rightarrow$ vi kan parallell-förflytta



nov 3-08:05

Multiplikation med skalär



Nollvektorn

skrivs 0

nov 3-08:05

Tillägg

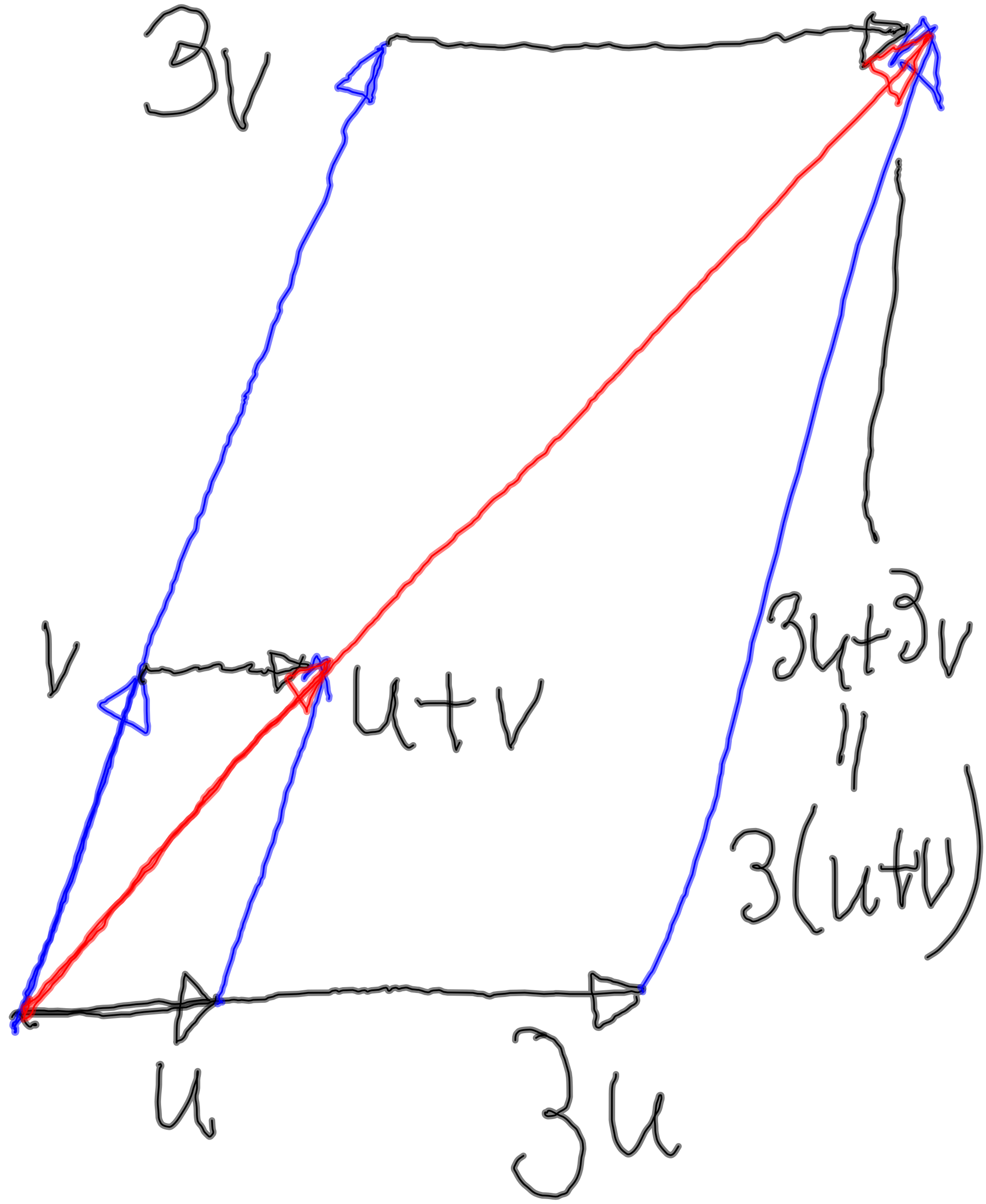
$$u + v = v + u$$

nov 3-08:05

Tryckfel!

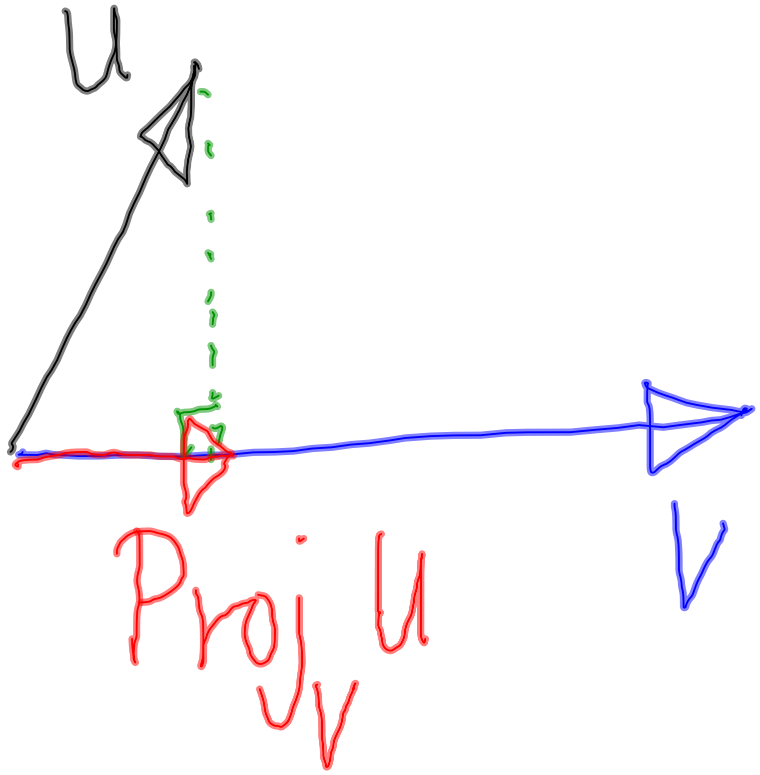
$$u + (-u) = 0$$

nov 3-08:05



nov 3-08:05

$|u|$ = längden av u



nov 3-08:05

Enhetsvektor

En vektor av längd 1 kallas enhetsvektor.

$$e_v = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{|v|} \cdot v$$

nov 3-08:05

Vi kan se att

$$|au| = |a||u|$$

absolutbeloppet av a

längden av u

nov 3-08:39

Alltså

$$|e_v| = \left|\frac{1}{|v|}\cdot v\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{|v|}\right| \cdot |v| = \frac{1}{|v|}\cdot |v|$$

$$= 1$$

nov 3-08:41

Projektion av u på v

$$\text{Proj}_v u = |u| \cos\theta \, e_v$$

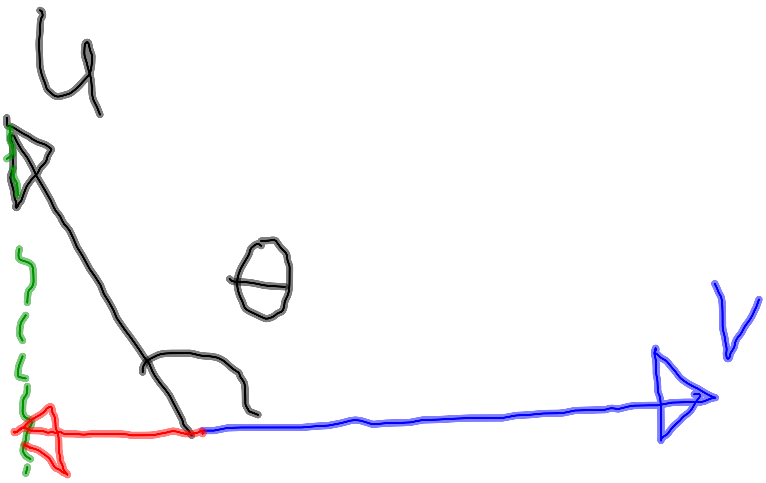
$$= |u| \cos\theta \frac{1}{|v|} \cdot v$$

$$= \frac{|u|\cos\theta}{|v|} v$$

nov 3-08:42

Om $\theta > 90^\circ$

så är $\cos\theta < 0$



Alltså viktigt att ej ta $|\cos\theta|$

nov 3-08:45

Vi inför ett origo.

O

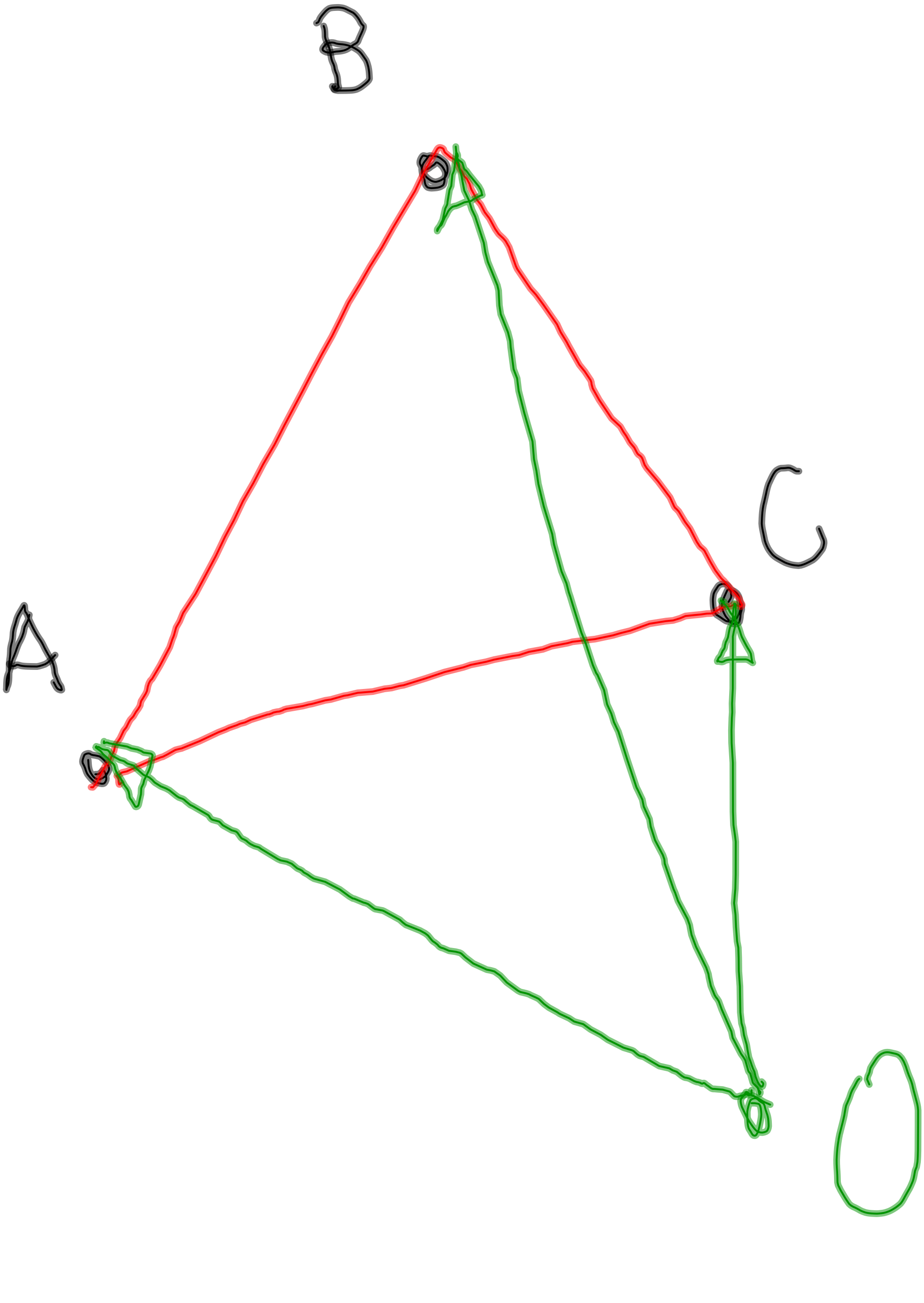
Vi får <u>ortsvektor</u>

för en punkt A

som $\overrightarrow{OA}$

nov 3-09:02

Triangel



nov 3-09:04

Sök mittpunkt på sidan AC.

Först till A, sedan hävägs till C från A.

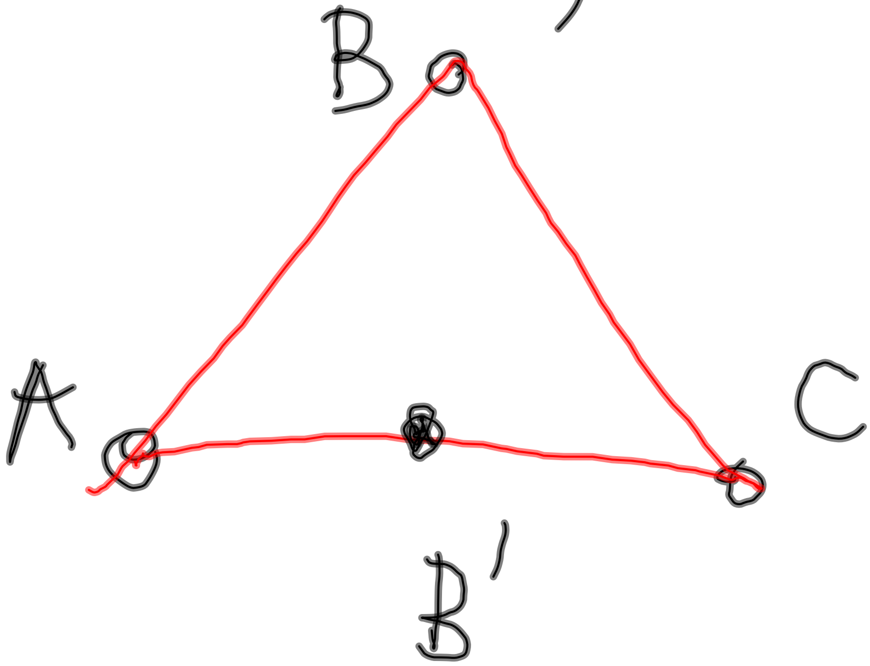
$\overrightarrow{AC}$ vektor från A till C.

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ är halva den vektorn.

Vi kan hitta mittpunkten som

nov 3-09:07

(ge den ett namn B')

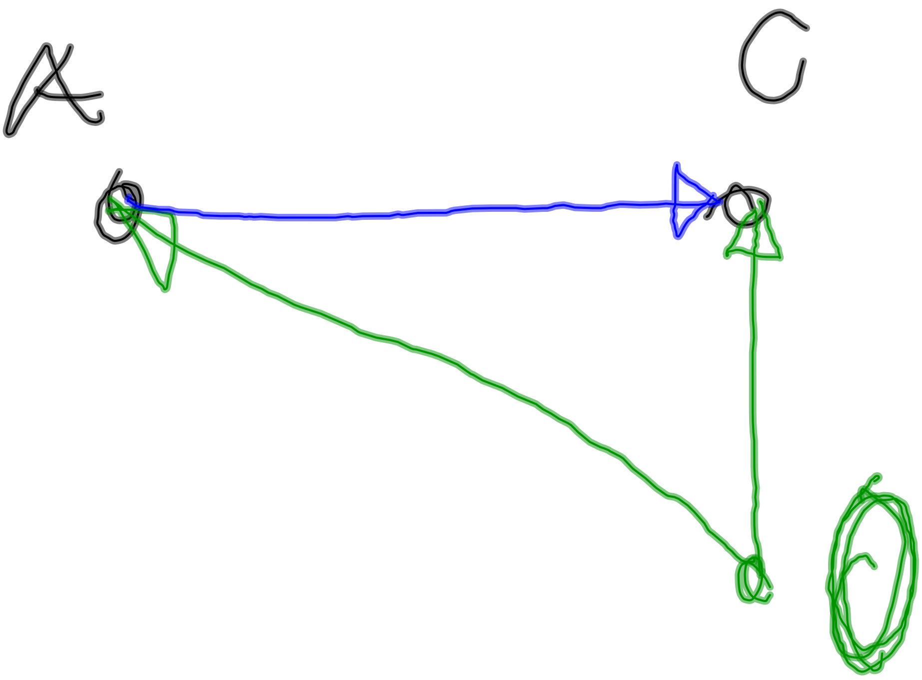


$$\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{OB'}$$

nov 3-09:08

Vi kan räkna ut $\vec{AC}$ genom

$$\vec{OA}+\vec{AC}=\vec{OC}$$



nov 3-09:09

Lös ut $\overrightarrow{AC}$

Som

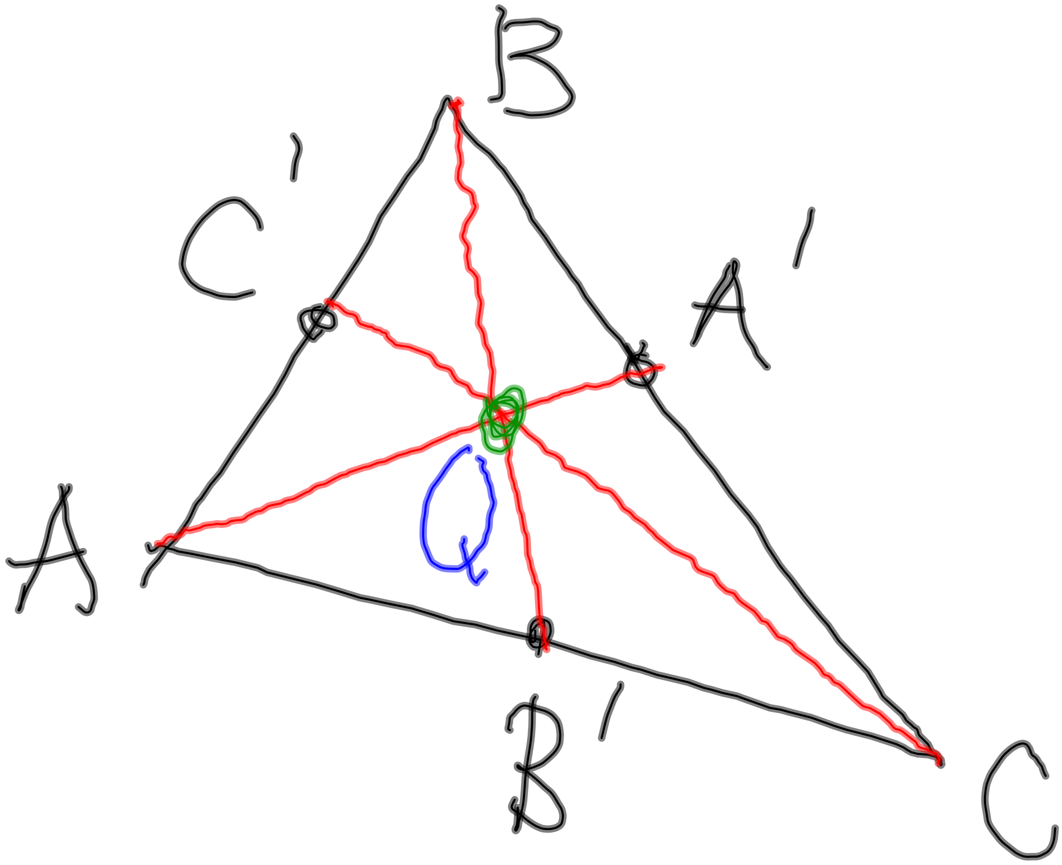
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

Alltså

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

nov 3-09:11



Tyngdpunkten Q ligger på en tredjedel av höjden.

nov 3-09:13

Alltså

$$\vec{OQ} = \vec{OB'} + \frac{1}{3}\vec{B'B} =$$

$$= \ldots\ldots\ldots =$$

$$= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC}$$

Koordinater

Vi har origo och väljer två (tre) riktningar vinkelräta mot varandra

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, (\vec{e}_z)$

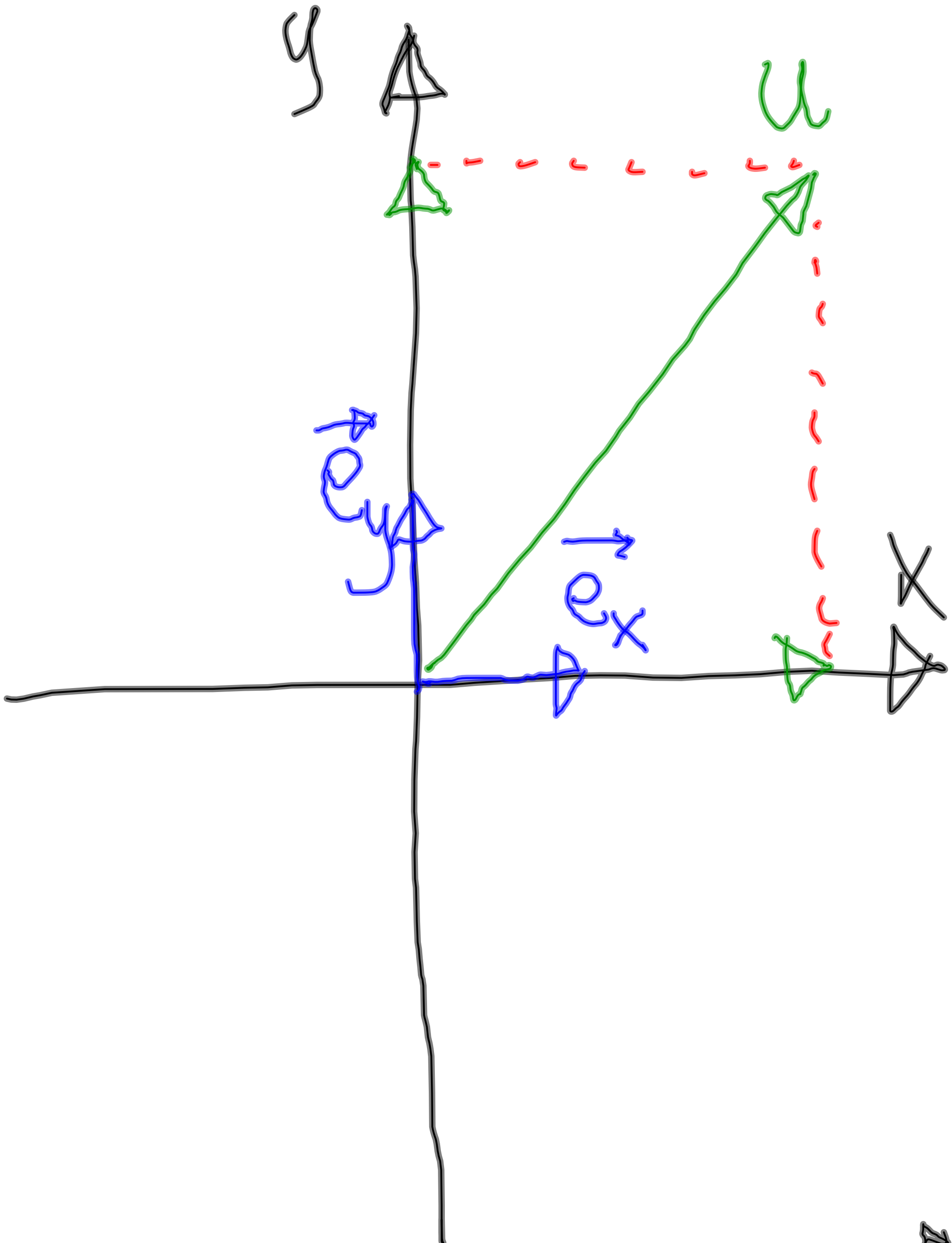
nov 3-09:18

Nu får alla vektorer koord. genom

$$\vec{u} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$$

Komponenterna är projektioner av u på de tre axlarna.

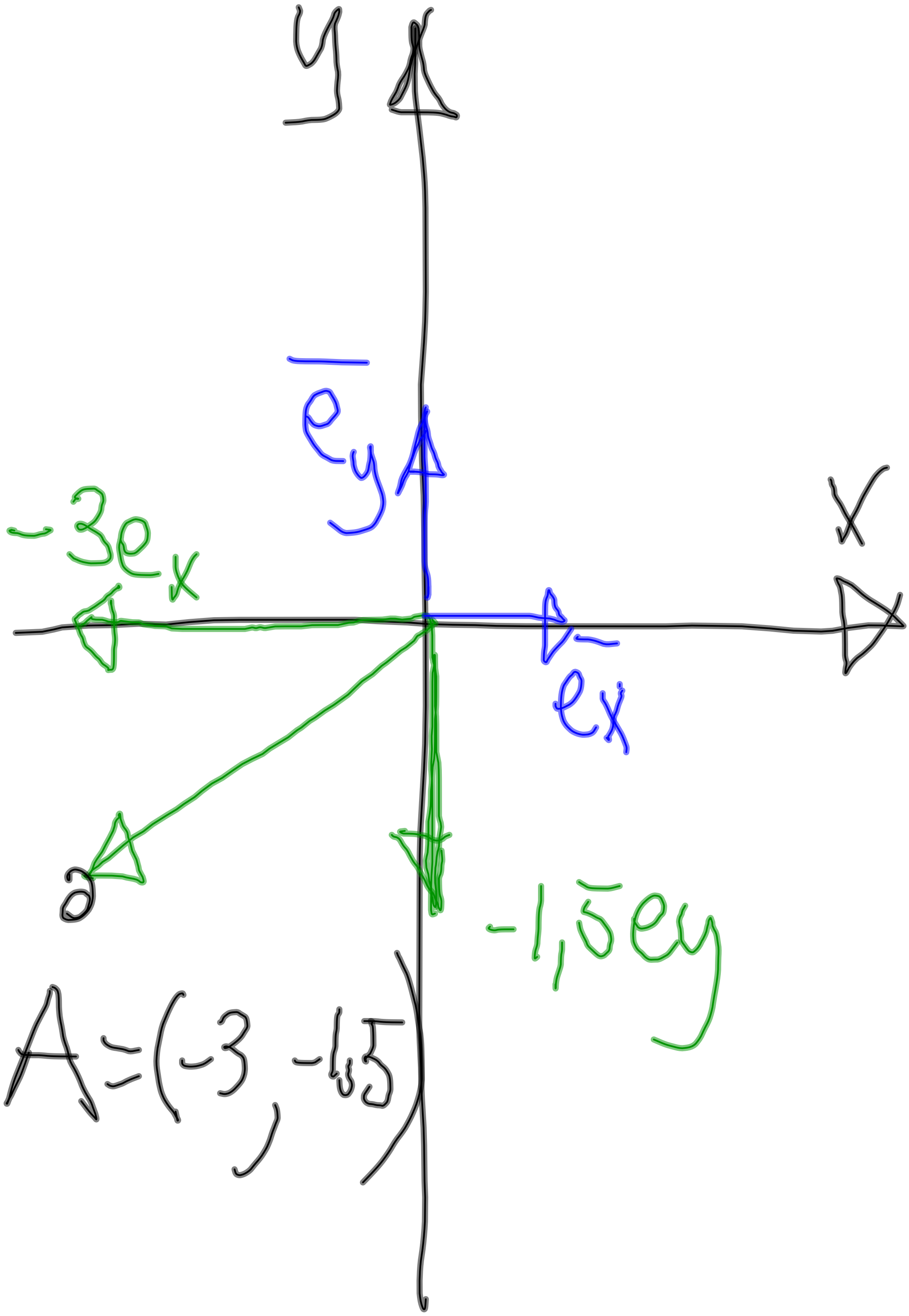
nov 3-09:19



$$\left(u = 2{,}5\vec{e}_x , \ 2{,}7\vec{e}_y \right)$$

nov 3-09:21

Vi får också
koordinater för
punkter genom
koord. för
ortsvektorn $\overrightarrow{OA}$



nov 3-09:24

Vi kan räkna med koord. för vektorerna

$$\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

$$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$u + v = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$$

nov 3-09:26

$$\bar{u} = u_x \vec{e_x} + u_y \vec{e_y} + u_z \vec{e_z}$$

$$\bar{v} = v_x \vec{e_x} + v_y \vec{e_y} + v_z \vec{e_z}$$

$$\bar{u} + \bar{v} = u_x \vec{e_x} + v_x \vec{e_x}$$

$$+ u_y \vec{e_y} + v_y \vec{e_y} +$$

$$+ u_z \vec{e_z} + v_z \vec{e_z}$$

$$= (u_x + v_x)\vec{e_x} + (u_y + v_y)\vec{e_y} + \ldots$$

nov 3-09:27

Alltså:

Tyngdpunkten för triangeln (1,1), (2,1) och (4,2) ges av

$$\frac{1}{3}(1+2+4,\ 1+1+2) = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

nov 3-09:30

Två sätt att multiplicera vektorer:

- Skalärmultiplikation
- kryssprodukt eller vektorprodukt

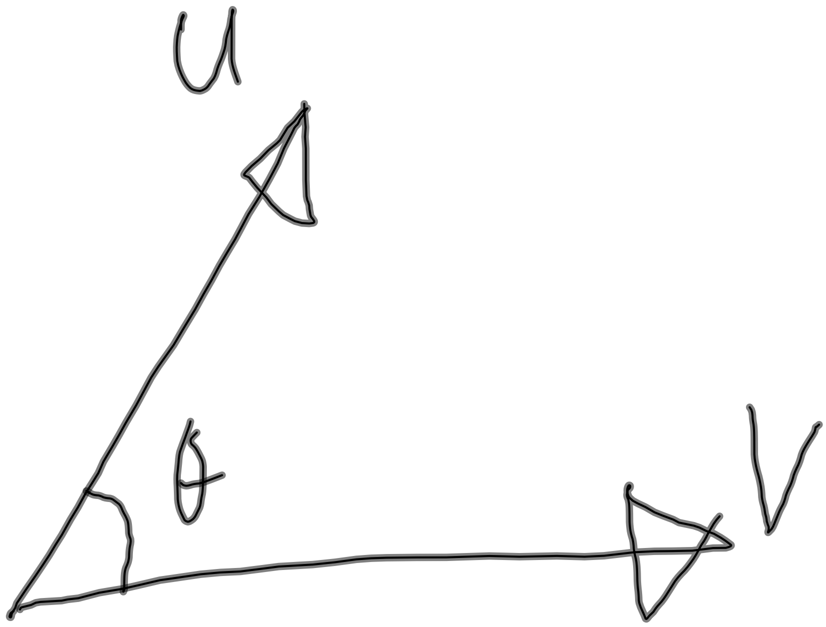
nov 3-09:31

Lättast med
Skalärprodukt

$$u \circ v = |u| \cdot |v| \cos\theta$$

där θ är vinkeln
mellan dem.

nov 3-09:33



nov 3-09:34

Vi kan nu jämföra med

$$\text{Proj}_v u = \frac{|u|\cos\theta}{|v|} v$$

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos\theta$$

alltså

$$\text{Proj}_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$$

nov 3-09:35

Fördel: $u \cdot v$
går att beräkna
bara med hjälp
av koordinaterna.

$$\bar{u} = (u_x, u_y)$$

$$\bar{v} = (v_x, v_y)$$

$$\bar{u} = u_x \vec{e_x} + u_y \vec{e_y}$$

$$\bar{v} = v_x \vec{e_x} + v_y \vec{e_y}$$

nov 3-09:38

Först kolla

<u>räknelagar</u>

$u \circ (v + w) =$

$= u \circ v + u \circ w$

Kolla att detta stämmer!

nov 3-09:39

$(a\bar{u})\cdot\bar{v} = a\bar{u}\cdot\bar{v}$

Då får vi

$\bar{u}\cdot\bar{v} = (u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y)$

$\cdot(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y)$

$= u_x v_x \vec{e}_x\cdot\vec{e}_x + (u_x v_y + u_y v_x)\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y +$

nov 3-09:41

$u_y v_y \vec{e_y} \cdot \vec{e_y}$

Men:

$\vec{e_x} \cdot \vec{e_x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$\vec{e_x} \cdot \vec{e_y} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

$\vec{e_y} \cdot \vec{e_y} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_x v_x + u_y v_y$

nov 3-09:43

nov 3-09:44